Rapport ZW 027 1957

Lekkerkerker, C.G.

Eine charakterische Eigenschaft der quadratischen Irrationalzahlen.

Es sei x eine feste irrationale Zahl und es bedeute J(x) die Menge der Zahlen $q^2(p/q-x)$, wobei p und q unabhängig voneinander die positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen. Es läszt sich zeigen, wie es neuerdings Cugiani (Boll. Un. Mat. It. 3/1955, 489-497) getan hat, dasz die Null dann und nur dann Häufungspunkt dieser Menge ist, wenn der regelmäszige Kettenbruch, in welchen sich x entwickeln läszt, keine begrenzten Teilnenner hat, und dasz in diesem Fall die genannte Menge überall dicht liegt auf wenigstens der positiven oder der negativen Zahlengerade.

Es fragt sich, was man über die Verteilung der Menge J(x) auf der Zahlengerade aussagen kann, wenn der betrachtete Kettenbruch begrenzte Teilnenner hat. Diese Frage gibt Anlasz zu einem neuen Kriterium für quadratische Irrationalzahlen. Es gilt nämlich folgender Satz: Die ableitung der Menge J(x), d.h. die Menge ihrer Häufungspunkte, ist dann und nur dann diskret, wenn x eine quadratische Zahl ist. Wesentlich für den Beweis dieses Satzes (Atti Acc. Naz. Lincei 1956, im Druck) ist die Betrachtung gewisser Teilmengen von J(x). Diese werden erhalten, in dem man für p und q(gleiche) feste, nichtnegative ganzzahlige Linear kombinationen der Zähler und Nenner zweier aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche von x nimmt. Setzt man voraus, dasz der Kettenbruch, in welchen sich x entwickeln läszt, die begrenzte Teilnenner hat, dann läszt sich zeigen: Die ableitung der Menge J(x) ist die Vereinigung der Ableitungen der genannten Teilmengen von J(x), und die erstere ist dann und nur dann diskret. wenn die letzteren alle endlich sind.

Overgenomen uit:
Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft;
Beilage zu "Internationale Mathematische Nachrichten",
Sondernummer: Bericht über den IV. Österreichischen Mathematiker-kongress, Wien, 17.- 22. IX. 1956.

Rapport ZW 027    1957

Lekkerkerker, C.G.

Eine charakterische Eigenschaft der quadratischen Irrationalzahlen.

Es sei x eine feste irrationale Zahl und es bedeute J(x) die Menge der Zahlen $q^2(p/q-x)$, wobei p und q unabhängig voneinander die positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen. Es läszt sich zeigen, wie es neuerdings Cugiani (Boll. Un. Mat. It. 3/1955, 489-497) getan hat, dasz die Null dann und nur dann Häufungspunkt dieser Menge ist, wenn der regelmäszige Kettenbruch, in welchen sich x entwickeln läszt, keine begrenzten Teilnenner hat, und dasz in diesem Fall die genannte Menge überall dicht liegt auf wenigstens der positiven oder der negativen Zahlengerade.

Es fragt sich, was man über die Verteilung der Menge J(x) auf der Zahlengerade aussagen kann, wenn der betrachtete Kettenbruch begrenzte Teilnenner hat. Diese Frage gibt Anlasz zu einem neuen Kriterium für quadratische Irrationalzahlen. Es gilt nämlich folgender Satz: Die ableitung der Menge J(x), d.h. die Menge ihrer Häufungspunkte, ist dann und nur dann diskret, wenn x eine quadratische Zahl ist. Wesentlich für den Beweis dieses Satzes (Atti Acc. Naz. Lincei 1956, im Druck) ist die Betrachtung gewisser Teilmengen von J(x). Diese werden erhalten, in dem man für p und q(gleiche) feste, nichtnegative ganzzahlige Linear kombinationen der Zähler und Nenner zweier aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche von x nimmt. Setzt man voraus, dasz der Kettenbruch, in welchen sich x entwickeln läszt, die begrenzte Teilnenner hat, dann läszt sich zeigen: Die ableitung der Menge J(x) ist die Vereinigung der Ableitungen der genannten Teilmengen von J(x), und die erstere ist dann und nur dann diskret. wenn die letzteren alle endlich sind.

Overgenomen uit:
Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft;
Beilage zu "Internationale Mathematische Nachrichten",
Sondernummer: Bericht über den IV. Österreichischen Mathematiker-kongress, Wien, 17.- 22, IX. 1956.